PHYSIK

Impuls und Stoß

Stand: 2. Januar 2022

Datei Nr. 91145

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Der Impuls und der Begriff Kraftstoß kann man besser verstehen, wenn man sie mit Zustandsänderungen in Zusammenhang bringt. Dies versuche ich zu erklären. Wichtige Anwendungen sind dann der elastische und der unelastische Stoß.

Inhalt

1	Bewegungszustand eines Körpers und sein Impuls	3
2	Änderung des Bewegungszustandes	4
3	Der unelastische Stoß	8
4	Der elastische Stoß	11
5	5 Gemischte umfangreiche Aufgaben	14
	Lösungen	18

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1 Bewegungszustand eines Körpers und sein Impuls

Wenn man beschreien soll, in welchem Bewegungszustand sich ein Köper befindet, dann sagt man vielleicht: „Er ist in Ruhe, was bedeutet, dass seine Geschwindigkeit Null ist.

Ist dies nicht der Fall, dann hat er eine bestimmte Geschwindigkeit, etwa $v = 10\,\frac{m}{s}$.

Jetzt haben wir nur den Betrag der Geschwindigkeit genannt. Im Grunde muss man die Geschwindigkeit jedoch als Vektor sehen, denn nicht nur der Betrag der Geschwindigkeit beschreibt den Zustand, sondern auch ihre Richtung. Daher verwendet man oft die Vektorschreibweise $\vec{v}$.

Muss man dann auch angeben, ob sich der Köper in einer gleichförmigen Bewegung befindet oder beschleunigt wird? Die Antwort ist nicht einfach zu geben: Wenn man den Bewegungszustand an einem bestimmten Zeitpunkt beschreiben will, dann interessiert nur die Momentangeschwindigkeit. Erst wenn man den Zustand in einem Zeitintervall wissen will, dann spielt die Geschwindigkeits-änderung eine Rolle, also die Beschleunigung. Und dann spricht man von einer Zustandsänderung, die allerdings auch in einem bestimmten Augenblick erfolgen kann. Etwa, wenn ein Körper auf einen anderen stößt, dann wird das Zeitintervall, in dem die Zustandsänderung erfolgt gegen Null gehen, und dann liegt eine momentane Zustandsänderung vor.

Wir müssen also den Bewegungszustand und die Zustandsänderung beschreiben können.
Und dann spielt eine weitere Größe eine wichtige Rolle, und das ist die Masse des Körpers.
Dies kennt jeder aus eigener Erfahrung. Stellen wir uns vor, dass wir mit dem Fuß einen Ball wegstoßen wollen. Handelt es sich um einen übrigen Fußball, dann gelingt das mühelos.
Stellen wir aber fest, dass es sich um eine Metallkugel handelt, dann wird dieses Experiment eine schmerzhafte Erfahrung. Erstens wird man sie nur schwer in Bewegung bringen, das heißt, dass wir der Kugel nur wenig Geschwindigkeit geben können, und zweiten beobachten wir, dass dieser Stoß auch einer Rückwirkung auf den stoßenden Fuß hat, denn der tut nach dem Stoß weh.

Ich will es „physikalischer“ ausdrücken: Hat eine Körper eine kleine Masse, dann kann man eine Zustandsänderung bereits mit weniger Kraft herbeiführen. Besitzt er jedoch eine größere Masse, dann wird die Wirkung der mit dem Stoß ausgeübten Kraft kleiner sein, d. h. die Zustandsänderung wird geringer ausfallen.

Wir müssen also bei der Beschreibung eines Bewegungszustandes auch die Masse des Körpers in Betracht ziehen, weil sie bei der Änderung des Zustands eine wichtige Rolle spielt.

Es hat sich als nützlich erwiesen, das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit als ein Maß für den Bewegungszustand zu verwenden. Man nennt dieses Produkt auch den **Impuls** eines Körpers:

$$p = m \cdot v \qquad \text{oder vektoriell:} \qquad \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Und wir sollten daran denken, dass der Impuls, also der Bewegungszustand zu einen bestimmten Zeitpunkt gehört. Wenn also zur Zeit t = 5 s der Körper der Masse 0,5 kg die Geschwindigkeit $v = 4\,\frac{m}{s}$ hat, dann besitzt er den Impuls $p = m \cdot v = 0{,}5\,kg \cdot 4\,\frac{m}{s} = 2\,\frac{kg \cdot m}{s}$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2 Änderung eines Bewegungszustandes

Zur Änderung eines Bewegungszustandes benötigt man eine Kraft. Diese bewirkt an der Masse eine Änderung der Geschwindigkeit, die man auch Beschleunigung nennt.
Das Newtonsche Grundgesetz zeigt den Zusammenhang:

$$F = m \cdot a \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{F}{m} \qquad (1)$$

Andererseits ist die Beschleunigung die Zunahme der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit:
Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist a konstant und es gilt:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2)$$

Die Wirkung eines Kraftstoßes ist umso größer, je größer die Kraft F ist, und je länger sie wirkt: Δt.
Es hat sich als sinnvollerweisen, mit dem Produkt $F \cdot \Delta t$ zu arbeiten. Man nennt es **Kraftstoß**.
Man kann ganz einfach zeigen, was man damit berechnen kann:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot a \cdot \Delta t$$

Aus (2) folgt: $a \cdot \Delta t = \Delta v$: $\quad F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$.

Ersetzt man $\Delta v = v_2 - v_1$: $\quad F \cdot \Delta t = m \cdot (v_2 - v_1) = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$

Nun sollte man sich erinnern, dass man das Produkt $m \cdot v$ den Impuls genannt hat, der den Bewegungszustand beschreiben soll. Damit erhält man die gesuchte Formel:

$$F \cdot \Delta t = p_2 - p_1$$

kurz: $$F \cdot \Delta t = \Delta p \qquad (3)$$

Diese Formel zeigt, wie **ein Kraftstoß eine Impulsänderung zur Folge hat**.

Man beachte: $\Delta p = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 = m \cdot (v_2 - v_1) \Rightarrow \boxed{\Delta p = m \cdot \Delta v}$

Rechenbeispiele

(1) Wie lange hat eine Kraft von 4 N auf einen ruhenden Körper der Masse 100 g eingewirkt, damit er auf $5\,\frac{m}{s}$ beschleunigt worden ist?

1. Lösung mit der Formel (3):

$$F \cdot \Delta t = \Delta p \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{p_2 - p_1}{F} = \frac{m \cdot v - 0}{F} = \frac{0{,}1\,kg \cdot 5\,\frac{m}{s}}{4N} = 0{,}125\ s$$

2. Lösung ohne Formel (3):

Die Kraft bewirkt die Beschleunigung $\quad a = \frac{F}{m} = \frac{4N}{0{,}1\,kg} = 40\,\frac{m}{s^2}$

Sie bewirkt eine Geschwindigkeitszunahme um

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{5\,\frac{m}{s}}{40\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}125\ s$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(2) In einem Experiment lässt man eine Stahlkugel der Masse 100 g aus der Höhe 5 m auf eine Stahlplatte fallen. Welchen Impuls hat sie im Moment des Auftreffens?
Die Kugel wird vollelastisch reflektiert. Welche Kraft übt die fallende Kugel auf die Platte aus, wenn der Stoß 0,01 s dauert? (Rechne mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$).

Lösung: Impuls: $p = m \cdot v = m \cdot \sqrt{2gs} = 0{,}1\,kg \cdot \sqrt{20\,\frac{m}{s^2} \cdot 5m} = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2}$

Bei einer vollelastischen Reflexion prallt die Kugel mit der gleichen Geschwindigkeit zurück.

Die Kugel prallt also mit $v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{20\,\frac{m}{s^2} \cdot 5m} = 10\,\frac{m}{s}$ auf der Stahlplatte auf und wird mit $v_2 = -10\,\frac{m}{s}$ reflektiert. Das Minuszeichen gibt nur die Richtung an.

Das ergibt eine Geschwindigkeitsänderung von $\Delta v = -10\,\frac{m}{s} - 10\,\frac{m}{s} = -20\,\frac{m}{s}$

Es folgt: $F \cdot \Delta t = \Delta p \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \cdot |\Delta v|}{\Delta t} = \frac{0{,}1\,kg \cdot 20\,\frac{m}{s}}{0{,}01\,s} = 200\,N$

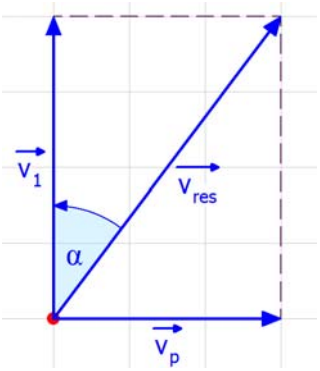
(3) Auf ein Schienenfahrzeug der Masse 500 kg, das sich mit einer Geschwindigkeit von $10\,\frac{m}{s}$ bewegt, wirkt eine Kraft von 400 N 10 Sekunden lang.
Welche Geschwindigkeit hat das Fahrzeug anschließend, wenn die Kraft
a) in Bewegungsrichtung wirkt?
b) entgegen der Bewegungsrichtung wirkt?
c) senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt?

Lösung:

a) $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \quad \Rightarrow \quad \Delta v = \frac{F \cdot \Delta t}{m} = \frac{400\,N \cdot 10\,s}{500\,kg} = 8\,\frac{m}{s}$.

Also ist $v_2 = v_1 + \Delta v = 10\,\frac{m}{s} + 8\,\frac{m}{s} = 18\,\frac{m}{s}$

b) Hier gilt: $v_2 = v_1 - \Delta v = 10\,\frac{m}{s} - 8\,\frac{m}{s} = 2\,\frac{m}{s}$



c) Und hier muss man die Geschwindigkeiten vektoriell addieren:

$\vec{v}_1$ ist die gegebene Geschwindigkeit mit $|\vec{v}_1| = 3\,\frac{m}{s}$

$\vec{v}_p$ ist die durch den Kraftstoß erzeugte Geschwindigkeit.

$\vec{v}_{res}$ ist die resultierende Geschwindigkeit also die zusätzliche Geschwindigkeit Δv nach dem Kraftstoß. Sie hat den Betrag $v_{res} = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + \Delta v^2} = \sqrt{\left(10\,\frac{m}{s}\right)^2 + \left(8\,\frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{164}\,\frac{m}{s} = 12{,}8\,\frac{m}{s}$

und die Richtung ist $\tan\alpha = \frac{\Delta v}{|\vec{v}_1|} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36{,}9^o$ gegen $\vec{v}_1$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(4) Welchen Impuls erhält ein ruhender Körper der Masse 640 kg, wenn auf ihn die Kraft 400 N 0,2 s lang einwirkt? Welche Geschwindigkeit hat er dann?

Lösung:

Es gilt: $F \cdot \Delta t = \Delta p$.

Da vor der Krafteinwirkung der Impuls gleich 0 war, ist $\Delta p = p_2 - 0$

Also folgt: $F \cdot \Delta t = p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 400\,\text{N} \cdot 0{,}2\text{s} = 80\,\text{Ns}$

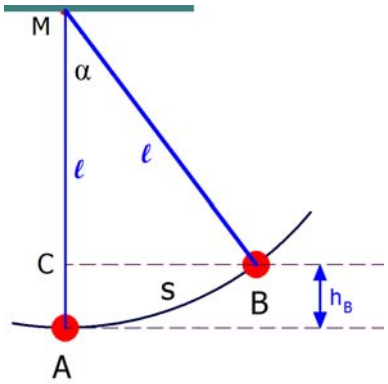
Weiter folgt: $p_2 = m \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{p_2}{m} = \frac{80\,\text{Ns}}{640\,\text{kg}} = \frac{1}{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}125\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

(5) Ein Kugel von 2,0 kg Masse hängt an einem 2,0 m langen Seil. Es wird durch einen Schlag mit einem Hammer um s = 10 cm ausgelenkt.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Kugel?

b) Berechne den durchschnittlichen Kraftstoß und die Kraft, wenn man eine Stoßdauer von 1 ms zugrunde legt.

Lösung:



a) Zuerst berechnet man den Auslenkwinkel α :

$$\sin\alpha = \frac{s}{\ell} = \frac{0{,}10\,\text{m}}{2\,\text{m}} = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad s = 2{,}87^\circ$$

Damit kann man die Höhe h berechnen, um die die Kugel nach dem Schlag angehoben wird.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{MC}}{\ell} = \frac{\ell - h}{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \ell - h = \ell \cdot \cos\alpha$$

$$h = \ell - \ell \cdot \cos\alpha = \ell \cdot (1 - \cos\alpha) = 2\,\text{m} \cdot \left(1 - \cos 2{,}87^\circ\right) = 0{,}0025\,\text{m}$$

Nun wendet man den Energiesatz an. Das NN sei im Tiefpunkt A.

$$E_A = \tfrac{1}{2} m v_A^2 \qquad E_B = m \cdot g \cdot h$$

$$\tfrac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 = \cancel{m} \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}0025\,\text{m}} = 0{,}22\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

b) $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v = 2\,\text{kg} \cdot 0{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}44\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}\,(= \text{N} \cdot \text{s})$

Daraus folgt: $F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{0{,}44}{0{,}001}\,\text{N} = 440\,\text{N}.$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Zusatz: Eine Impulsänderung kann auch durch eine Änderung der Masse passieren

Wenn eine Rakete Masse verbrennt und dadurch ihren Antrieb durch Rückstoß gewinnt.
ändert sich der Impuls:

Bisher hatten wir den Kraftstoß nur durch eine Geschwindigkeitsänderung berechnet:

$$F \cdot \Delta t = \Delta p$$

Daraus folgt: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$

Wenn sich nur v ändert, folgt $F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Nun reduzieren wir die Zeitspanne auf einen Moment, d.h. wir betrachten die **momentane Impulsänderung**.

Dazu muss man den Grenzwert für $\Delta t \to 0$ berechnen:

$$F(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = m \cdot \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot a(t)$$

Wenn nun auch eine Massenänderung möglich sein soll, dann muss man die Impulsfunktion $p(t) = m(t) \cdot v(t)$ mit der Produktregel ableiten:

$$F(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \dot{p}(t) = \dot{m}(t) \cdot v(t) + m(t) \cdot \dot{v}(t)$$

Kleines Beispiel dazu:

(6) Eine Spielzeugrakete verbrennt in 4 s etwa 10 g Substanz, mit der es Rückstoß erzeugt. Die Schubkraft wurde mit 1,0 N gemessen.

Wie groß ist die Ausströmgeschwindigkeit des Raketentreibstoffs?

In $F = \dot{m}(t) \cdot v(t) + m(t) \cdot \dot{v}(t)$ ist v konstant, also ist die Ableitung (Änderung) $\dot{v} = 0$.

ferner ist $\Delta t = 4s$ $\Delta m = 10g$ $\Rightarrow$ $\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{0{,}010\ kg}{5s} = 0{,}002\ \frac{kg}{s}$

Aus $F = \dot{m}(t) \cdot v(t) + m(t) \cdot \dot{v}(t)$ folgt somit

$$1N = 0{,}002\ \tfrac{kg}{s} \cdot v + m \cdot 0\ \tfrac{m}{s^2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1N}{0{,}02\ \frac{kg}{s}} = 50\ \tfrac{m}{s}$$

Betrachtung der Einheiten: $\frac{N}{\frac{kg}{s}} = \frac{N \cdot s}{kg} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot s}{kg} = \frac{m}{s}$!!!

Demo-Text für www.mathe-cd.de

3 Der unelastische Stoß

Wenn zwei Körper zusammenstoßen und sie sich danach gemeinsam (d. h. wie ein einziger Körper) bewegen, spricht man von einem unelastischen Stoß.

(7) **Ein einfaches Beispiel** ist der Schuss mit einer Pistole in einen ruhenden Körper, etwa in ein aufgehängtes Brett, das frei schwingen kann.

Die Berechnung der Geschwindigkeit von Brett mit darin steckender Kugel geschieht über die Berechnung von Impulsen.

Impulse vor dem Stoß:

Wenn die Kugel die Masse 6 g hat und mit $v = 500\,\frac{m}{s}$ abgefeuert wird,

hat sie den Impuls $p_{K,vor} = m_K \cdot v_K = 0{,}006\ kg \cdot 500\,\frac{m}{s} = 3\,\frac{kg \cdot m}{s}$

Das Ziel ist ein ruhendes Brett, das somit den Impuls $p_{B,vor} = 0$ hat.

Impulse vor dem Stoß:

Kugel und Brett haben nach dem Stoß dieselbe Geschwindigkeit u, daher gilt

$p_{K,nach} = 0{,}006\ kg \cdot u$

Und das Brett mit der Masse 200 g: $p_{B,nach} = 0{,}2\ kg \cdot u$

Es ist ein Naturgesetz, dass in einem abgeschlossenen System die Impulssumme in jedem Zeitpunkt konstant ist. (Impulserhaltungssatz)

Daher gilt: Impulssumme vor dem Stoß: $p_{vor} = 3\,\frac{kg \cdot m}{s} + 0$

Impulssumme nach dem Stoß: $p_{nach} = 0.006\ kg \cdot u + 0{,}2\ kg \cdot u = 0{,}206\ kg \cdot u$

Der Impulserhaltungssatz liefert: $0{,}206\ kg \cdot u = 3\,\frac{kg \cdot m}{s}$

Daraus folgt: $u = \frac{3}{0{,}206}\,\frac{m}{s} = 14{,}6\,\frac{m}{s}$

Ergebnis: Nach dem Schuss haben Holzbrett mit Kugel die Geschwindigkeit $14{,}6\,\frac{m}{s}$

Bei diesem Experiment geht Energie verloren, was man so nachrechnen kann:
Wir nehmen an, dass die Schussbahn horizontal ist, dann müssen wir nur die kinetische Energie untersuchen:

Energie vor dem Schuss: $E_{vor} = \frac{1}{2} \cdot m_K v_K^2 = 0{,}003\ kg \cdot \left(500\,\frac{m}{s}\right)^2 = 750\ J$

Energie nach dem Schuss: $E_{nach} = \frac{1}{2} \cdot (m_K + m_B) \cdot u^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}206\ kg \cdot \left(14{,}6\,\frac{m}{s}\right)^2 = 22\ J$

Energieverlust: $\Delta E = 750\ J - 22\ J = 728\ J$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(8) Zwei Körper gleiten horizontal aufeinander zu und haften nach dem Stoß aneinander.
Berechne eine Formel für die Geschwindigkeit nach dem Stoß.
Untersuche dann verschiedene Fälle.

Lösung:

Körper 1 habe die Geschwindigkeit v_1 und die Masse m_1.

Körper 2 habe die Geschwindigkeit v_2 und die Masse m_2.

Wenn sich die Körper aufeinander zu bewegen, müssen v_1 und v_2 verschiedene Vorzeichen haben, etwa $v_1 > 0$ und $v_2 < 0$.

Die Geschwindigkeit nach dem Stoß sei u.

Impulssumme vor dem Stoß: $p_{vor} = m_1 v_2 + m_2 v_2$

Impulssumme nach dem Stoß: $p_{nach} = (m_1 + m_2) \cdot u$

Impulserhaltungssatz: $(m_1 + m_2) \cdot u = m_1 v_1 + m_2 v_2$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Falluntersuchungen: Zuerst sei $v_1 > 0$ und $v_2 < 0$.

1. Die Massen seien gleich groß und $v_2 = -2v_1$.
   (Das heißt, dass Masse 2 mit der doppelten Geschwindigkeit auf Masse 1 zufährt.)

$$u = \frac{m v_1 - 2m v_1}{2m} = -\frac{v_1}{2}$$

   Das heißt, dass sich die verbundenen Massen in Richtung von Masse 2 weiterbewegen,

2. Die Geschwindigkeiten seien gleich groß aber entgegengesetzt und $m_1 = 2m_2$.

$v_2 = -v_1$ $$u = \frac{2m_2 v_1 - m_2 v_2}{3m_2} = \frac{m_2 v_2}{3m_2} = \frac{v_2}{3}$$

   Das heißt, dass sich die verbundenen Massen in Richtung von Masse 1 weiterbewegen.

Falluntersuchung: Beide Körper bewegen sich in die gleiche Richtung:

Der schnellere muss hinter dem langsameren fahren, sonst gibt es keinen Stoß.

3. Es sei $v_2 = 2v_1$ und $m_1 = m_2$: $$u = \frac{m \cdot v_1 + m \cdot 2v_1}{2m} = \frac{3}{2} v_1$$

4. Es sei $v_2 = 0{,}5\, v_1$ und $m_2 = 2\, m_1$: $$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + 2m_1 \cdot \frac{1}{2} v_1}{\frac{3}{2} m_1} = \frac{2v_1}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} v_1$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(9) Mit einem Gewehr der Masse 5 kg wird eine Kugel von 25 g mit der Geschwindigkeit $600\,\frac{m}{s}$ abgeschossen. Wenn das Gewehr nicht stabilisiert ist, also quasi frei hängt, erfährt es dabei einen Rückstoß. Berechne die zugehörende Geschwindigkeit.

Lösung:

Vor dem Schuss: $v_{Gew} = 0\,\frac{m}{s}$ und $v_{Kug} = 0$

Nach dem Schuss: $v_{Gew} = u_{Gew} = ?$ und $v_{Kug} = u_{Kug} = 600\,\frac{m}{s}$.

Impulserhaltungssatz: $\underbrace{p_{vor} = 0} = \underbrace{u_{gew}\,5\text{ kg} + u_{Kug}\cdot 0{,}025\text{ kg} = p_{nach}}$

Umstellen nach u_{Gew}: $u_{Gew} = -\dfrac{600\,\frac{m}{s}\cdot 0{,}025\text{ kg}}{5\text{ kg}} = 3\,\frac{m}{s}$

(10) Eine Rakete wird senkrecht nach oben abgeschossen. Ihre Gesamtmasse ist 15.000 kg. Hiervon entfallen auf den Treibsatz 12.000 kg. Die Verbrennungsgase strömen mit der konstanten Geschwindigkeit von $3{,}5\,\frac{km}{s}$ aus.

a) Wieviel kg Treibstoff müssen je Sekunde ausgestoßen werden, damit die Schubkraft 350.000 N beträgt?

b) Wann ist der Beschleunigungsvorgang beendet?
Wie groß ist die Beschleunigung beim Start? (Rechne mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$).
Gib einen Funktionsterm für $a(t)$ an, für das Zeitintervall, in dem beschleunigt wird.

Lösung:

a) Es gilt $F\cdot\Delta t = \Delta p$

Da die Geschwindigkeit der Gase konstant ist ändert sich nur die Masse.

Also ist $\Delta p = \Delta m\cdot v_{Gas}$.

Damit folgt: $F\cdot\Delta t = \Delta m\cdot v_{Gas}$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{F}{v_{Gas}} = \frac{350.000\text{ N}}{3500\,\frac{m}{s}} = 100\,\frac{kg}{s}$$

b) Es sind 12.000 kg Treibstoff vorhanden. Das reicht für $t = \dfrac{12.000\text{ kg}}{100\,\frac{kg}{s}} = 120\text{ s} = 2\text{ min}$

Der Schub erzeugt die Beschleunigung $a_S = \dfrac{F}{m} = \dfrac{350.000\text{ N}}{15.000\text{ kg}} = \dfrac{70}{3}\,\frac{m}{s^2} \approx 23{,}2\,\frac{m}{s^2}$

Am Anfang: $a(0) = a_S - g = 13{,}2\,\frac{m}{s^2}$

Allgemein: $a(t) = \dfrac{230.000\text{ N}}{15.000\text{ kg} - 100\,\frac{kg}{s}\cdot t}$ für $0 \le t < 120\text{ s}$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

4 Der elastische Stoß

Man nennt einen Stoß elastisch, wenn beim Stoß keine Energie verloren geht.
Dazu ist es erforderlich, dass sich die beteiligten Massen nach dem Stoß getrennt weiterbewegen.

(11) Zwei Kugeln der Massen 200 g und 600g bewegen sich entlang einer geraden horizontalen Linie so, dass die zweite Kugel mit $v_2 = 10\,\frac{m}{s}$ die erste Kugel mit $v_1 = 5\,\frac{m}{s}$ einholt. Es folgt ein elastischer zentraler Stoß. Berechne die Geschwindigkeiten nach dem Stoß.

Lösung:

Es gilt der Impulssatz: $\underbrace{m_1v_1 + m_2v_2}_{p_2} = \underbrace{m_1u_1 + m_2u_2}_{p_2}$ (1)

Mit Zahlen: $0{,}2\text{ kg}\cdot 5\,\frac{m}{s} + 0{,}6\text{ kg}\cdot 10\,\frac{m}{s} = 0{,}2\text{ kg}\cdot u_1 + 0{,}6\text{ kg}\cdot u_2$

$7\,\frac{m}{s} = 0{,}2\,u_1 + 0{,}6\,u_2$ (2)

Es gilt der Energiesatz: $\underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2}_{E_{vor}} = \underbrace{\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2}_{E_{nach}}$ (3)

Mit Zahlen: $32{,}5\,\frac{m^2}{s^2} = 0{,}1\cdot u_1^2 + 0{,}3\,u_2^2$

bzw. $325\,\frac{m^2}{s^2} = u_1^2 + 3\,u_2^2$ (4)

Zur Berechnung der beiden Unbekannten u_1 und u_2 (die Geschwindigkeiten nach dem Stoß) gibt es die beiden Gleichungen (2) und (4).

Ich stelle (2) nach u_1 um: $u_1 = 35\,\frac{m}{s} - 3\,u_2$ (5)

Und setzte das in (4) ein: $325\,\frac{m^2}{s^2} = \left(35\,\frac{m}{s} - 3\,u_2\right)^2 + 3\,u_2^2$

$325\,\frac{m^2}{s^2} = 1225\,\frac{m^2}{s^2} - 210\,\frac{m}{s}\cdot u_2 + 12\,u_2^2$

Ordnen: $12u_2^2 - 210\,\frac{m}{s}\cdot u_2 + 900\,\frac{m^2}{s^2} = 0 \quad |:12$

Jetzt lasse ich die Einheiten weg, damit wird die Lösungsformel übersichtlicher:

$$u_2^2 - 17{,}5\cdot u_2 + 75 = 0$$

$$u_2 = \frac{17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 4\cdot 75}}{2} = \frac{17{,}5 \pm 2{,}5}{2} = \begin{cases}(10)\\ \mathbf{7{,}5}\end{cases} \quad \left(\frac{m}{s}\right)$$

Die Lösung $u_2 = 10\,\frac{m}{s}$ gilt dann, wenn zwischen den beiden Zeitpunkten „vor und nach“ kein Stoß stattgefunden hat.

Aus (5) erhält man $u_1 = 35\,\frac{m}{s} - 3\cdot 7{,}5\,\frac{m}{s} = \mathbf{12{,}5\,\frac{m}{s}}$.

Ergebnis: Nach einem Stoß ist die zuerst langsamere erste Kugel schneller als die zweite.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(12) Zwei Kugeln der Massen 200 g und 600g bewegen sich entlang einer geraden horizontalen Linie mit $v_2 = 10\frac{m}{s}$ und $v_1 = 5\frac{m}{s}$ aufeinander zu.
Es folgt ein elastischer zentraler Stoß. Berechne die Geschwindigkeiten nach dem Stoß.

Diese beiden Kugeln haben dieselben Massen und Geschwindigkeiten wie in Aufgabe 11, nur dass sie aufeinander zulaufen. Man muss daher den Geschwindigkeiten unterschiedliche Vorzeichen geben, etwa $v_2 = 10\frac{m}{s}$ und $v_1 = -5\frac{m}{s}$. Das hat aber nur Einfluss auf den Impuls, nicht auf die kinetische Energie.

Es gilt der Impulssatz: $$\underbrace{m_1v_1 + m_2v_2}_{p_2} = \underbrace{m_1u_1 + m_2u_2}_{p_2} \qquad (1)$$

Mit Zahlen: $$0{,}2\,kg \cdot \left(-5\frac{m}{s}\right) + 0{,}6\,kg \cdot 10\frac{m}{s} = 0{,}2\,kg \cdot u_1 + 0{,}6\,kg \cdot u_2$$

$$5\frac{m}{s} = 0{,}2\,u_1 + 0{,}6\,u_2$$

$$u_1 = 25\frac{m}{s} - 3u_2 \qquad (2)$$

Es gilt der Energiesatz: $$\underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2}_{E_{vor}} = \underbrace{\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2}_{E_{nach}} \qquad (3)$$

Mit Zahlen: $$32{,}5\frac{m^2}{s^2} = 0{,}1 \cdot u_1^2 + 0{,}3\,u_2^2$$

bzw. $$325\frac{m^2}{s^2} = u_1^2 + 3u_2^2 \qquad (4)$$

Elimination von u_1 durch Einsetzen von (2) in (4):

$$325\frac{m^2}{s^2} = \left(25\frac{m}{s} - 3u_2\right)^2 + 3\,u_2^2$$

$$325\frac{m^2}{s^2} = 625\frac{m^2}{s^2} - 150\frac{m}{s} \cdot u_2 + 12\,u_2^2$$

Ordnen der quadratischen Gleichung, Einheiten weglassen:

$$12u_2^2 - 150 \cdot u_2 + 300 = 0 \qquad |\ :12$$

$$u_2^2 - 12{,}5 \cdot u_2 + 25 = 0$$

$$u_2 = \frac{12{,}5 \pm \sqrt{12{,}5^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{12{,}5 \pm 7{,}5}{2} = \begin{cases}(10) \\ \mathbf{2{,}5}\end{cases} \quad \left(\frac{m}{s}\right)$$

Das Ergebnis $u_2 = 10\frac{m}{s}$ gilt nur dann wenn zwischen den beiden Zeitpunkten, in denen Impulssatz und Energiesatz angewandt worden sind, kein Stoß stattgefunden hat,

Aus (2) erhält man : $$u_1 = 25\frac{m}{s} - 3 \cdot 2{,}5\frac{m}{s} = \mathbf{17{,}5\frac{m}{s}}$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(13) **Spezialfall: Zwei gleichschwere Massen stoßen elastisch zusammen.**

a) Es sei $v_2 = 2v_1$ und $m_1 = m_2 = m$ (m_2 holt m_1 ein)

b) Es sei $v_2 = -2v_1$ und $m_1 = m_2 = m$ (Die Körper bewegen sich aufeinander zu☺

Berechne die Geschwindigkeiten nach dem Stoß (also eine Formel dafür).

Lösung:

a) **Impulssatz:** $m \cdot v_1 + m \cdot v_2 = m \cdot u_1 + m \cdot u_2 \quad | :m$

$v_1 + 2v_1 = u_1 + u_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 + u_2 = 3v_1$ (1)

Energiesatz: $\frac{1}{2}m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}m \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}m \cdot u_2^2$

$v_1^2 + (-2v_1)^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad u_1^2 + u_2^2 = 5v_1^2$ (2)

Aus (1) folgt: $u_1 = 3v_1 - u_2$ (3)

Einsetzen in (2) $(3v_1 - u_2)^2 + u_2^2 = 5v_1^2$ ergibt: $9v_1^2 - 6v_1 \cdot u_2 + 2u_2^2 = 5v_1^2$

Ordnen: $2u_2^2 - 6v_1 \cdot u_2 + 4v_1^2 = 0 \quad | :2$

$u_2^2 - 3v_1 \cdot u_2 + 2v_1^2 = 0$

$$u_2 = \frac{3v_1 \pm \sqrt{9v_1^2 - 8v_1^2}}{2} = \frac{3v_1 \pm v_1}{2} = \begin{cases} 2v_1 \\ v_1 \end{cases}$$

In (3): $u_1 = 3v_1 - \begin{cases} 2v_1 \\ v_1 \end{cases} = \begin{cases} v_1 \\ 2v_1 \end{cases}$

Das heißt: In der 1. Möglichkeit ist $v_2 = 2v_1$ und $\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = 2v_1 \end{cases}$

Dabei hat sich also nichts geändert, es hat kein Stoß stattgefunden.

In der 2. Möglichkeit ist $v_2 = 2v_1$ und $\begin{cases} u_1 = 2v_1 \\ u_2 = v_1 \end{cases}$

Jetzt haben die beiden Körper ihre Geschwindigkeiten getauscht !!!

b) **Impulssatz:** $m \cdot v_1 - m \cdot v_2 = m \cdot u_1 + m \cdot u_2$

$v_1 - 2v_1 = u_1 + u_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 + u_2 = -v_1$ (1)

Energiesatz: $\frac{1}{2}m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}m \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}m \cdot u_2^2$

$v_1^2 + (-2v_1)^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad u_1^2 + u_2^2 = 5v_1^2$ (2)

Aus (1) folgt: $u_1 = -v_1 - u_2$ (3)

Einsetzen in (2) $(-v_1 - u_2)^2 + u_2^2 = 5v_1^2$ d. h. $v_1^2 - 2v_1 \cdot u_2 + 2u_2^2 = 5v_1^2$

Ordnen: $2u_2^2 - 2v_1 \cdot u_2 - 4v_1^2 = 0$ ergibt $u_2^2 - v_1 \cdot u_2 - 2v_1^2 = 0$

$$u_2 = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 8v_1^2}}{2} = \frac{v_1 \pm 3v_1}{2} = \begin{cases} 2v_1 \\ -2v_1 \end{cases} \text{ und aus (3): } u_1 = -v_1 - \begin{cases} 3v_1 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -4v_1 \\ -v_1 \end{cases}$$

Im 1. Fall hat kein Stoß stattgefunden, im 2. Fall haben sie die Geschwindigkeiten getauscht.

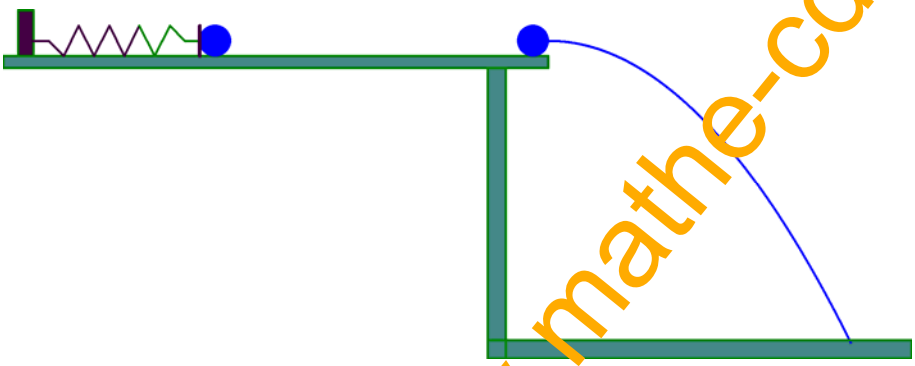
Demo-Text für www.mathe-cd.de

5 Gemischte umfangreiche Aufgaben

A1 Eine Kugel der Masse 250 g wird auf reinem Tisch gegen eine Feder gedrückt. Dabei wird diese durch eine Kraft von 20 N um 5 cm zusammengedrückt. Nach dem Loslassen entspannt sich die Feder, wodurch sich die Kugel reibungsfrei über den Tisch bewegt. Dann stößt sie elastisch und zentral gegen eine zweite Kugel der Masse 200 g. Diese fliegt dann vom Tisch ab und landet 45 cm tiefer.

a) Berechne die Geschwindigkeit der beiden Kugeln nach dem Stoß.

b) Wie weit fliegt die zweite Kugel hinaus?



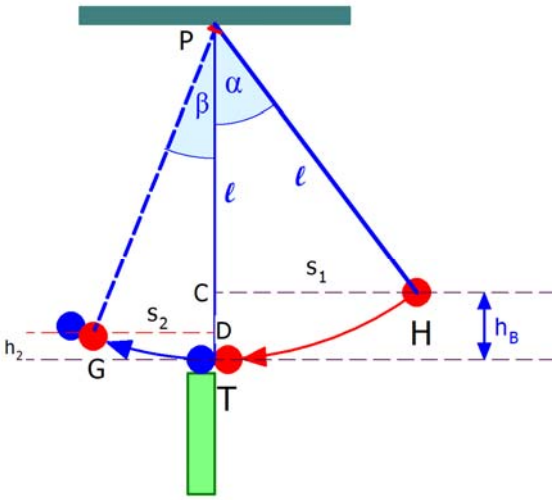
A2 Ein Pendel der Länge ℓ wird um $\alpha = 60°$ ausgelenkt.

Der Pendelkörper hat die Masse m.

Im tiefsten Punkt der Schwingung spießt die Pendelkugel einen Körper der Masse $\frac{m}{2}$ auf und schwingt mit diesem zusammen weiter..

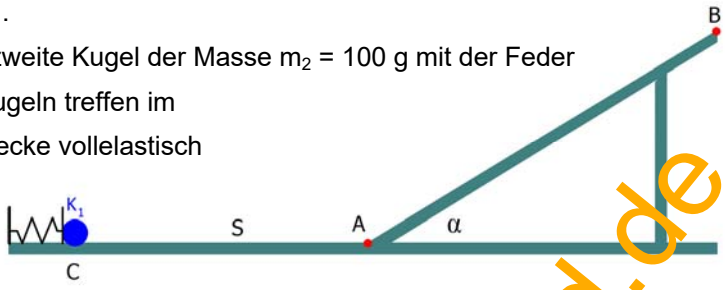
a) Beweise, dass das Pendel vor dem Stoß die Geschwindigkeit $v = \sqrt{g \cdot \ell}$ hat.

b) Wie hoch schwingt das Pendel nach dem Stoß, gib auch den Auslenkungswinkel β an.



Demo-Text für www.mathe-cd.de

A3 Eine Kugel der Masse m_1 = 50 g wird gegen eine Feder mit $D = 900\,\frac{N}{m}$ gedrückt, die sich dabei um 2,5 cm verkürzt. nach dem Loslassen rollt sie einen Hang hinauf und dann wieder zurück..
Inzwischen wurde eine zweite Kugel der Masse m_2 = 100 g mit der Feder abgeschossen. Beide Kugeln treffen im horizontalen Teil der Strecke vollelastisch aufeinander.



a) Welche Geschwindigkeit erhält die 1. Kugel auf der Horizontalen, wenn die Feder 80% ihrer Energie an sie abgibt?

b) Wie stark ist die Feder für die 2. Kugel zu spannen, damit sie mit derselben Geschwindigkeit abgeschossen wird, wie die erste Kugel ?

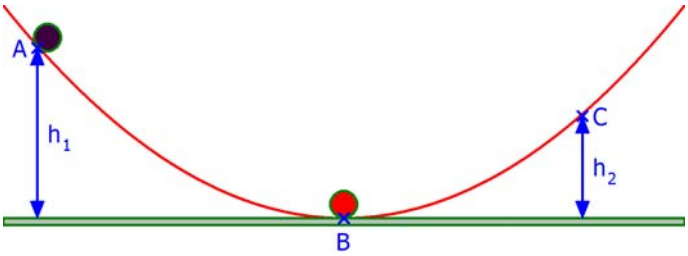
c) Welche Geschwindigkeiten haben die Kugeln nach dem Stoß?

d) Welche konstante Kraft hat dabei auf Kugel 1 gewirkt, wenn man eine Stoßdauer von 1 ms Stoßdauer ausgeht?
Wie groß wäre dann höchstens die Strecke, auf der die Kugel in die entgegengesetzte Richtung beschleunigt wird? Warum ist sie tatsächlich kleiner?

A4 In einer Rinne wird eine Kugel der Masse $m_1 = m$ im Punkt A losgelassen.
A befindet sich h_1 = 80 cm über dem tiefsten Punkt der Rinne.

a) In B liegt eine zweite Kugel der Masse $m_2 = 2 \cdot m$. Welche Geschwindigkeit haben beide Kugeln, nachdem m_1 auf m_2 gestoßen ist, und zwar wenn
(a_1) der Stoß elastisch (a_2) unelastisch war.
Wie hoch steigen die Kugeln nach dem Stoß in allen Fällen?
Wie groß ist der Energieverlust beim unelastischen Stoß.

b) Nun rollt m_2 von C aus der Kugel m_1 entgegen. In welcher Höhe muss D liegen, damit die Kugel m_1 nach dem Stoß in B liegen bleibt?
Rechne „elastisch und unelastisch“.
Kann es auch vorkommen, dass in B beide Kugeln stehen bleiben?



Demo-Text für www.mathe-cd.de

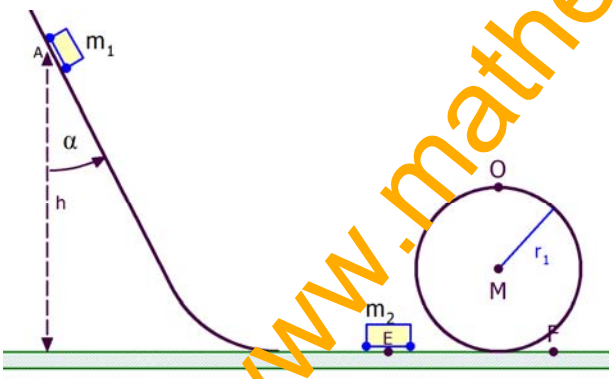
A5 Ein Fahrzeug $m_1$der Masse m_1 fährt einen Abhang hinunter. Dabei überwindet es einen Höhenunterschied von 80 cm. Unten steht in E ein anderes Fahrzeug unbekannter Masse M.

a) Mit welcher Geschwindigkeit stoßen die beiden Fahrzeuge zusammen?
Von Reibung ist abzusehen, der Stoß sei elastisch.

Welche Masse m_2 hat das Fahrzeug in E, wenn es nach dem Stoß mit $u_2 = 2\frac{m}{s}$ weiterfährt.

b) Beschreibe die Stelle an der m_1 nach dem Stoß wieder anhält.

c) m_2 fährt anschließend durch die Kreisbahn. Wie groß darf deren Radius höchstens sein, damit die Bahn gerade noch durchfahren werden kann ?



Demo-Text für www.mathe-cd.de

Lösungen

Demo-Text für www.mathe-cd.de

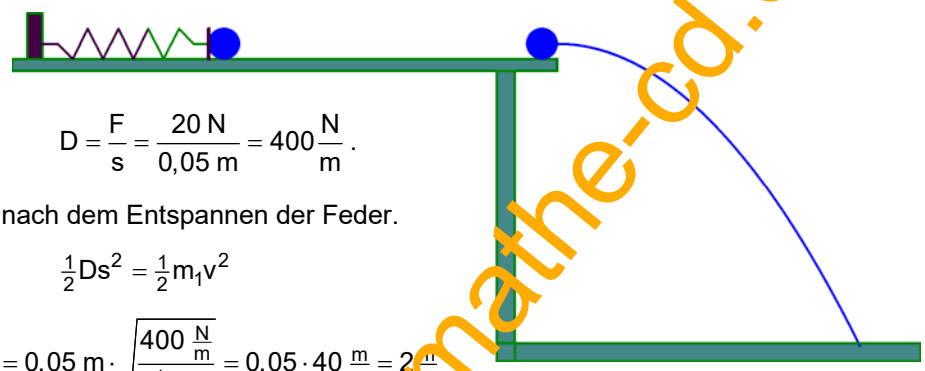
A1

Eine Kugel der Masse 250 g wird auf reinem Tisch gegen eine Feder gedrückt. Dabei wird diese durch eine Kraft von 20 N um 5 cm zusammengedrückt. Nach dem Loslassen entspannt sich die Feder, wodurch sich die Kugel reibungsfrei über den Tisch bewegt. Dann stößt sie elastisch und zentral gegen eine zweite Kugel der Masse 200 g. Diese fliegt dann vom Tisch ab und landet 45 cm tiefer.

a) Berechne die Geschwindigkeit der beiden Kugeln nach dem Stoß.

b) Wie weit fliegt die zweite Kugel hinaus? $\left(g = 10\,\frac{m}{s}\right)$

Lösung:



Zuerst die Federstärke: $D = \frac{F}{s} = \frac{20\text{ N}}{0{,}05\text{ m}} = 400\,\frac{N}{m}$.

Geschwindigkeit der Kugel nach dem Entspannen der Feder.

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2}Ds^2 = \frac{1}{2}m_1v^2$

$$v^2 = \frac{Ds^2}{m_1} \quad \Rightarrow \quad v = s\cdot\sqrt{\frac{D}{m_1}} = 0{,}05\text{ m}\cdot\sqrt{\frac{400\,\frac{N}{m}}{\frac{1}{4}\text{ kg}}} = 0{,}05\cdot 40\,\frac{m}{s} = 2\,\frac{m}{s}$$

a) Für den Stoß gilt der **Impulssatz**: $m_1\cdot v + m_2\cdot 0 = m_1u_1 + m_2u_2$

Mit Zahlen: $0{,}25\text{ kg}\cdot 2\,\frac{m}{s} = 0{,}25\text{ kg}\cdot u_1 + 0{,}20\text{ kg}\cdot u_2$

Mal 100 und durch kg: $50\,\frac{m}{s} = 25\,u_1 + 20\,u_2 \qquad |:25$

$$\boxed{2\,\frac{m}{s} = u_1 + 0{,}8\cdot u_2} \qquad (1)$$

Dann der **Energiesatz** $E_{vor} = \frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = E_{nach}$

Mal 2 und mit Zahlen: $0{,}25\text{ kg}\cdot 4\,\frac{m^2}{s^2} = 0{,}25\text{ kg}\cdot u_1^2 + 0{,}20\text{ kg}\cdot u_2^2$

Mal 100 und durch kg: $100\,\frac{m^2}{s^2} = 25\,u_1^2 + 20\,u_2^2 \qquad |:25$

$$\boxed{4\,\frac{m^2}{s^2} = u_1^2 + 0{,}8\,u_2^2} \qquad (2)$$

Elimination von u_1: Aus (1): $u_1 = 2\,\frac{m^2}{s^2} - 0{,}8\,u_2 \qquad (3)$

in (2): $4\,\frac{m^2}{s^2} = \left(2\,\frac{m^2}{s^2} - 0{,}8\,u_2\right)^2 + 0{,}8\,u_2^2$

$$\cancel{4\,\frac{m^2}{s^2}} = \cancel{4\,\frac{m^2}{s^2}} - 3{,}2\,\frac{m}{s}\cdot u_2 + 0{,}64\,u_2^2 + 0{,}8\,u_2^2$$

Ordnen der quadratischen Gleichung: $1{,}44\,u_2^2 - 3{,}2\,\frac{m}{s}\cdot u_2 = 0$

$$u_2\cdot\left(1{,}44\,u_2 - 3{,}2\,\frac{m}{s}\right) = 0$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1. Lösung $u_2 = 0\,\frac{m}{s}$ in (3) $\Rightarrow$ $u_1 = 2\,\frac{m}{s}$ (Ohne Stoß!)

2. Lösung: $u_2 = \frac{3{,}2}{1{,}44}\,\frac{m}{s} = \frac{20}{9}\,\frac{m}{s} \approx 2{,}22\,\frac{m}{s}$ in (3) $\Rightarrow$ $u_1 = 2\,\frac{m}{s} - 0{,}8 \cdot \frac{20}{9}\,\frac{m}{s} = \frac{2}{9}\,\frac{m}{s} \approx 0{,}22\,\frac{m}{s}$

b) Nun folgt ein waagrechter Wurf.

Bewegungsgleichungen:

In x-Richtung: $\begin{cases} v_x = u_2 = \frac{20}{9}\,\frac{m}{s} & (1) \\ x = u_2 \cdot t = \frac{20}{9}\,\frac{m}{s} \cdot t & (2) \end{cases}$

In y-Richtung (nach unten): $\begin{cases} v_y = g \cdot t & (3) \\ y = \frac{1}{2} g t^2 & (4) \end{cases}$

Bedingung: Falltiefe y = 0,45 m

Aus (4): $t^2 = \frac{2y}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{0{,}9\,m}{10\,\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{0{,}09\,s} = 0{,}3\,s$

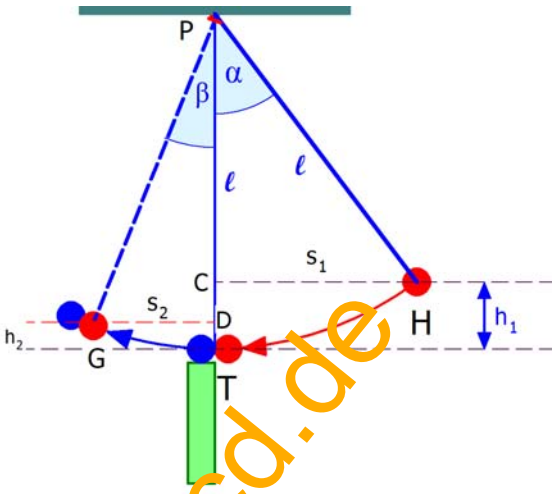
In (2): Flugweite: $x = \frac{20}{9}\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}3\,s = \frac{6}{9}\,m = \frac{2}{3}\,m \approx 0{,}33\,m$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

A2 Ein Pendel der Länge ℓ wird um $\alpha = 60^\circ$ ausgelenkt.
Der Pendelkörper hat die Masse m.
Im tiefsten Punkt der Schwingung spießt die Pendelkugel einen Körper der Masse $\frac{m}{2}$ auf und schwingt mit diesem zusammen weiter.

a) Beweise, dass das Pendel vor dem Stoß die Geschwindigkeit $v = \sqrt{g \cdot \ell}$ hat.

b) Wie hoch schwingt das Pendel nach dem Stoß? Gib auch den Auslenkungs-winkel β an.



Lösung:

a) Berechnung der Geschwindigkeit v vor dem Stoß mit dem **Energieerhaltungssatz**.
Und dazu muss man die Höhe h_1 der Auslenkung bis zum Hochpunkt H berechnen.

Im Dreieck PCH gilt: $\cos\alpha = \frac{\ell - h_1}{\ell} \Rightarrow \ell - h_1 = \ell \cdot \cos\alpha \Rightarrow h_1 = \ell - \ell \cdot \cos 60^\circ = \ell - \frac{1}{2}\ell = \frac{1}{2}\ell$

Energie der Pendelkugel in H: $E_H = m \cdot g \cdot h_1 = m \cdot g \cdot \frac{1}{2}\ell$ (Nullniveau in T)

Energie der Pendelkugel in T: $E_T = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Energiebilanz: $m \cdot g \cdot \frac{1}{2}\ell = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow v^2 = g \cdot \ell \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{g \cdot \ell}}$

b) Es handelt sich um einen **unelastischen Stoß.**
Da ist der Impulserhaltungssatz anwendbar:

Impuls vor dem Stoß: $p_{vor} = m \cdot v + \frac{m}{2} \cdot 0 = m \cdot v$

Impuls nach dem Stoß: $p_{nach} = \left(m + \frac{m}{2}\right) \cdot u$

Impulsbilanz: $\left(m + \frac{m}{2}\right) \cdot u = m \cdot v$

$\frac{3}{2}\cancel{m} \cdot u = \cancel{m} \cdot v \Rightarrow u = \frac{2}{3} v$

bzw. $\boxed{u = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{g \cdot \ell}}$

Berechnung der neuen Höhe nach dem Stoß mit dem Energieerhaltungssatz:

$$\underbrace{E_T = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{3}{2}m} \cdot u^2}\ = \underbrace{\cancel{\frac{3}{2}m} \cdot g \cdot h_2 = E_G}$$

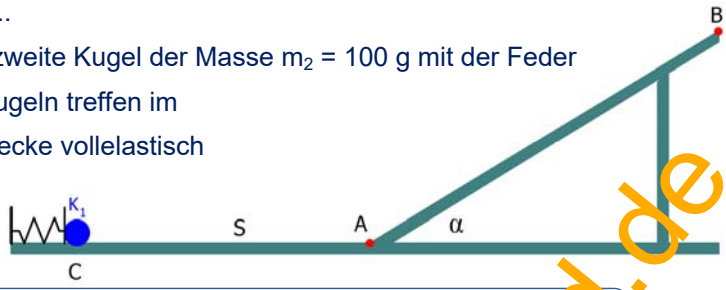
Daraus folgt: $h_2 = \frac{u^2}{2g} = \frac{4 \cdot g \cdot \ell}{9 \cdot 2g} = \frac{2}{9} \cdot \ell$

Und damit kann man im Dreieck SGP den Auslenkwinkel β berechnen:

$$\cos\beta = \frac{\ell - h_2}{\ell} = \frac{\ell - \frac{2}{9}\ell}{\ell} = \frac{\frac{7}{9}\ell}{\ell} = \frac{7}{9} \Rightarrow \beta = 39^\circ$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

A3 Eine Kugel der Masse m_1 = 50 g wird gegen eine Feder mit $D = 900\,\frac{N}{m}$ gedrückt, die sich dabei um 2,5 cm verkürzt. nach dem Loslassen rollt sie einen Hang hinauf und dann wieder zurück..
Inzwischen wurde eine zweite Kugel der Masse m_2 = 100 g mit der Feder abgeschossen. Beide Kugeln treffen im horizontalen Teil der Strecke vollelastisch aufeinander.



a) Welche Geschwindigkeit erhält die 1. Kugel auf der Horizontalen, wenn die Feder 80% ihrer Energie an sie abgibt?

Spannenergie der Feder: $E_{Sp} = \frac{1}{2}Ds_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 900\,\frac{N}{m}\cdot 0{,}025^2\ m^2 = 0{,}28125\ J$

80% davon ergeben die kinetische Energie der Kugel:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0{,}8\cdot E_{Sp} \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}025\ kg\cdot v^2 = 0{,}8\cdot 0{,}28125\ J \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}28125}{0{,}025}}\,\frac{m}{s} = 3\,\frac{m}{s}$$

b) Wie stark ist die Feder für die 2. Kugel zu spannen, damit sie mit derselben Geschwindigkeit abgeschossen wird, wie die erste Kugel?

Auch für die 2. Kugel soll $v = 3\,\frac{m}{s}$ erreichen.

$$0{,}8\cdot \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot Ds_2^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot m_2\cdot 9\,\frac{m^2}{s^2} \quad\Leftrightarrow\quad s_2^2 = \frac{m_2\cdot 9\,\frac{m^2}{s^2}}{0{,}8\cdot D} = \frac{0{,}1\,kg\cdot 9\,\frac{m^2}{s^2}}{0{,}8\cdot 900\,\frac{N}{m}} = 0{,}125\ m^2$$

Daraus: $s = \sqrt{0{,}125}\ m = 0{,}35\ m = 35\ cm$

c) Welche Geschwindigkeiten haben die Kugeln nach dem Stoß?

Elastischer Stoß im Punkt S: (Nullniveau in S) mit $v_1 = -3\,\frac{m}{s}$ und $v_2 = 3\,\frac{m}{s}$!!!!!

Impulssatz: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$

$$0{,}05\ kg\cdot 3\,\frac{m}{s} + 0{,}10\ kg\cdot 3\,\frac{m}{s} = 0{,}05\ kg\cdot u_1 + 0{,}10\ kg\cdot u_2 \quad |\ :0{,}05\ kg$$

$$-3\,\frac{m}{s} + 6\,\frac{m}{s} = u_1 + 2\,u_2 \quad\Rightarrow\quad u_1 = 3\,\frac{m}{s} - 2u_2 \qquad (1)$$

Energiesatz: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \quad |\ \cdot 2$

Mit Zahlen: $0{,}05\ kg\cdot 9\,\frac{m^2}{s^2} + 0{,}10\ kg\cdot 9\,\frac{m^2}{s^2} = 0{,}05\ kg\cdot u_1^2 + 0{,}1\,kg\cdot u_2^2 \quad |\ :0{,}05\ kg$

$$9\,\frac{m^2}{s^2} + 18\,\frac{m^2}{s^2} = u_1^2 + 2u_2^2 \qquad (2)$$

(1) in (2) und ohne Einheiten: $27 = (3 - 2u_2)^2 + 2u_2^2$

$$27 = 9 - 12u_2 + 6u_2^2 \quad\Leftrightarrow\quad 6u_2^2 - 12u_2 - 18 = 0 \quad |:6$$

$$u_2^2 - 2u_2 - 3 = 0$$

$$u_2 = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases}(3)\\ -1\end{cases}\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Der Fall $u_3 = 3\frac{m}{s}$ tritt ein, wenn noch kein Stoß stattgefunden hat.

Dazu aus (1): $u_1 = 3\frac{m}{s} - 2\cdot(-1)\frac{m}{s} = 5\frac{m}{s}$

Ergebnis: Nach dem Stoß kehrt die 1. Kugel um und fährt mit $u_1 = 5\frac{m}{s}$ wieder nach rechts und die 2.- Kugel kehrt auch um und fährt mit $u_2 = 1\frac{m}{s}$ nach links.

d) Welche konstante Kraft hat dabei auf Kugel 1 gewirkt, wenn man eine Stoßdauer von 1 ms Stoßdauer ausgeht?
Wie groß wäre dann höchstens die Strecke, auf der die Kugel in die entgegengesetzte Richtung beschleunigt wird? Warum ist sie tatsächlich kleiner?

Für den Kraftstoß gilt: $F\cdot\Delta t = m_1\cdot\Delta v$

Daraus folgt: $F = \frac{m_1\cdot\Delta v}{\Delta t} = \frac{0{,}05\text{ kg}\cdot\left(5\frac{m}{s}-(-3)\frac{m}{s}\right)}{0{,}001\text{ s}} = \frac{0{,}4\text{ N}}{0{,}001} = 400\text{ N}$

Diese Kraft ergibt die Beschleunigung

$$a = \frac{F}{m} = \frac{400\text{ N}}{0{,}05\text{ kg}} = 8000\,\frac{m}{s^2}$$

Und damit in der Zeit 1 ms den Weg

$$s \le \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot 8000\frac{m}{s^2}\cdot\left(10^{-3}s\right)^2 = 4\cdot 10^{-3}m = 4\text{ mm}.$$

Die Beschleunigungsstrecke ist tatsächlich kleiner, weil beim Stoß eine leichte Verformung eintritt, die zu einer inneren Erwärmung der Kugeln an der Stoßstelle führt, was leichten Energieverlust zur Folge hat.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

A4 In einer Rinne wird eine Kugel der Masse $m_1 = M$ im Punkt A losgelassen.

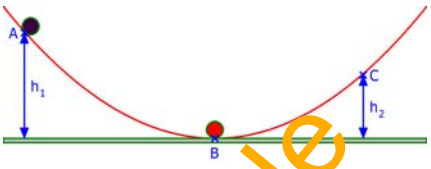
A befindet sich h_1 = 80 cm über dem tiefsten Punkt der Rinne.

a) In B liegt eine zweite Kugel der Masse $m_2 = 2M$.

Welche Geschwindigkeit haben beide Kugeln, nachdem m_1 auf m_2 gestoßen ist, und zwar wenn der Stoß

(a_1) elastisch war. Wie hoch steigt m_1 nach dem Stoß?

(a_2) unelastisch war. Wie groß ist dann der Energieverlust?



a) Berechnung von v_1 mit dem Energieerhaltungssatz: (NN in B)

$$\left.\begin{array}{l} E_A = m_1 \cdot g \cdot h_1 \\ E_B = \frac{1}{2} \cdot m_1 v_1^2 \end{array}\right\} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 \cdot g \cdot h_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2g \cdot h_1} = \sqrt{20\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 0{,}8\,m} = \sqrt{16}\,\tfrac{m}{s} = 4\,\tfrac{m}{s}$$

(a_1): Elastischer Stoß in B:

Impulssatz: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad \Rightarrow \quad M \cdot 4\,\tfrac{m}{s} + 2M \cdot 0\,\tfrac{m}{s} = M \cdot u_1 + 2M \cdot u_2 \quad | :M$

$$4\,\tfrac{m}{s} = u_1 + 2u_2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 4\,\tfrac{m}{s} - 2u_2 \qquad (1)$$

Energieerhaltungssatz: $\underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{E_{vor}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 u_2^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2}_{E_{nach}} \quad \Leftrightarrow \quad 16\,\tfrac{m^2}{s^2} M = M u_1^2 + 2M u_2^2 \quad (2)$

(1) in (2): $16\,\tfrac{m^2}{s^2} M = M\left(4\,\tfrac{m}{s} - 2u_2\right)^2 + 2M u_2^2 \quad | :M$

$$16\,\tfrac{m^2}{s^2} = \left(16\,\tfrac{m^2}{s^2} - 16\,\tfrac{m}{s} \cdot u_2 + 4u_2^2\right) + 2u_2^2$$

$$6u_2^2 - 16\,\tfrac{m}{s} u_2 = 0 \quad | :2$$

$$u_2 \cdot \left(3u_2 - 8\,\tfrac{m}{s}\right) = 0$$

1. Lösung: $u_2 = 0$. Dann hat kein Stoß stattgefunden.

2. Lösung: $u_2 = \frac{8}{3}\,\frac{m}{s} \approx 2{,}7\,\frac{m}{s}$

Aus (1) folgt dazu $u_1 = 4\,\frac{m}{s} - 2 \cdot \frac{8}{3}\,\frac{m}{s} = -\frac{4}{3}\,\frac{m}{s} \approx -1{,}3\,\frac{m}{s}$

Die Kugel 1 kehrt also um und steigt wieder in Richtung A hinauf bis zu einem Punkt D.
Die Höhe h_D wird mit dem Energieerhaltungssatz berechnet:

$$E_D = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot M \cdot u_1^2 = M \cdot g \cdot h_D}_{} = E_D \quad \Rightarrow \quad h_D = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{16}{9 \cdot 20}\,m \approx 0{,}089\,m = 8{,}9\,cm$$

(a_2): Unelastischer Stoß in B: Hierbei ist $u_2 = u_1$ und es gilt nur der Impulssatz:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u + m_2 u \quad \Rightarrow \quad M \cdot 4\,\tfrac{m}{s} = 3M \cdot u \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u = \tfrac{4}{3}\,\tfrac{m}{s}} \approx 1{,}22\,\tfrac{m}{s}$$

Energieverlust: $E_{vor} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot 16\,\frac{m^2}{s^2} + \frac{1}{2} \cdot 2M \cdot 0\,\frac{m^2}{s^2} = M \cdot 8\,\frac{m^2}{s^2}$

$$E_{nach} = \frac{1}{2} M \cdot u^2 + \frac{1}{2} \cdot 2Mu^2 = \frac{3}{2} M \cdot \left(\frac{4}{3}\,\frac{m}{s}\right)^2 = M \cdot \frac{8}{3}\,\frac{m^2}{s^2} \quad \Delta E = M \cdot \frac{16}{3}\,\frac{m}{s}.$$

Prozentual: $\dfrac{\Delta E}{E_{vor}} = \dfrac{M \cdot \frac{16}{3}\,\frac{m}{s}}{M \cdot 8\,\frac{m}{s}} \cdot 100\% = \frac{2}{3} \cdot 100\% = \frac{200}{3}\% = 66{,}7\%$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

b) Nun rollt m_2 von C aus der Kugel m_1 entgegen. In welcher Höhe muss D liegen, damit die Kugel m_1 nach dem elastischen Stoß in B liegen bleibt?
Kann es auch vorkommen, dass in B beide Kugeln stehen bleiben?

Wir haben also $m_1 = M$, die von A aus herunterrollt und in B vor dem Stoß die Geschwindigkeit $v_1 = 4\frac{m}{s}$ hat. Wir kennen auch $u_2 = 0$. Unbekannt sind v_2 in B und u_1, die Geschwindigkeit von m_1 nach dem Stoß. Diese zwei Unbekannten kann man mit Impulssatz und Energiesatz berechnen:

Impulssatz: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \quad \Rightarrow \quad M \cdot 4\frac{m}{s} + 2M \cdot v_2 = M \cdot u_1 + 2M \cdot 0\frac{m}{s} \quad | :M$

$$4\frac{m}{s} + 2v_2 = u_1 \qquad (1)$$

Energiesatz: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \quad \Rightarrow \quad M \cdot 16\frac{m^2}{s^2} + 2M \cdot v_2^2 = M \cdot u_1^2 \quad | :M$

$$16\frac{m^2}{s^2} + 2v_2^2 = u_1^2 \qquad (2)$$

(1) in (2): $16\frac{m^2}{s^2} + 2v_2^2 = \left(4\frac{m}{s} + 2v_2\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \cancel{16\frac{m^2}{s^2}} + 2v_2^2 = \cancel{16\frac{m^2}{s^2}} + 16\frac{m}{s} \cdot v_2 + 4v_2^2$

$$2v_2^2 + 16\frac{m}{s} \cdot v_2 = 0 \quad | :2$$

$$v_2 \cdot \left(v_2 + 8\frac{m}{s}\right) = 0$$

1. Lösung: $v_2 = 0\frac{m}{s}$: Dann hat kein Stoß stattgefunden!

2. Lösung: $v_2 = -8\frac{m}{s}$. Dazu aus (1): $u_1 = 4\frac{m}{s} - 16\frac{m}{s} = -12\frac{m}{s}$

Ergebnis: Die zweite Kugel läuft also nach links (neg. Vorzeichen!) mit $12\frac{m}{s}$ und stößt elastisch gegen m_1, worauf m_2 stehen bleibt: $u_2 = 0\frac{m}{s}$.

(b2) Unelastischer Stoß:

Impulssatz: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u + m_2u \quad \Rightarrow \quad M \cdot 4\frac{m}{s} + 2M \cdot v_2 = M \cdot u_1 + 2M \cdot 0\frac{m}{s} \quad | :M$

$$4\frac{m}{s} + 2v_2 = u_1 \qquad (1)$$

Kann es auch vorkommen, dass in B beide Kugeln stehen bleiben?

Dann muss $u_1 = u_2 = 0\frac{m}{s}$ sein.

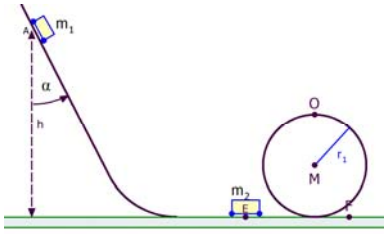
Impulssatz: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1 \cdot 0\frac{m}{s} + m_2 \cdot 0\frac{m}{s} \quad \Rightarrow \quad M \cdot 4\frac{m}{s} + 2M \cdot v_2 = 0\,kg\frac{m}{s} \quad | :M$

$$4\frac{m}{s} + 2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -2\frac{m}{s}.$$

Ergebnis: Wenn $m_2 = 2m_1$ halb so schnell in B auf m_1 stößt wie m_1, dann haben beide Kugeln denselben Impuls aber mit entgegengesetzter Richtung. Der Gesamtimpuls ist dann 0, d. h. beide Kugeln kommen nach dem Stoß zum Halten. Dann ist die gesamt Bewegungsenergie verschwunden, also kann es sich nur um einen unelastischen Stoß handeln.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

A5 Ein Fahrzeug $m_1$der Masse m_1 fährt einen Abhang hinunter.
Dabei überwindet es einen Höhenunterschied von 80 cm.
Unten steht in E ein anderes Fahrzeug unbekannter Masse m_2.



a) Mit welcher Geschwindigkeit stoßen die beiden Fahrzeuge zusammen? Von Reibung ist abzusehen, der Stoß sei elastisch. Welche Masse m_2 hat das Fahrzeug in E, wenn es nach dem Stoß mit $u_2 = 2\frac{m}{s}$ weiterfährt.

Für die Fahrt m_1 von A bis E kann man den Energieerhaltungssatz benutzen:

$$\underbrace{E_A = m_1 \cdot g \cdot h} = \underbrace{\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = E_E} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{20\tfrac{m}{s^2} \cdot 0{,}8m} = 4\tfrac{m}{s}$$

Damit stößt m_1 auf das stehende Fahrzeug m_2. Für den <u>elastischen Stoß</u> gilt:

Impulssatz: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot 0\frac{m}{s} = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot 4\frac{m}{s} = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot 2\frac{m}{s}$ (1)

Energiesatz: $\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot 8\frac{m^2}{s^2} = \frac{1}{2} m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot 4\frac{m^2}{s^2}$ (2)

Hinweis: Man sollte erkennen, dass in diesen beiden Gleichungen <u>drei</u> unbekannte Größen stehen. Diese sind nicht berechenbar. Wenn man aber die Aufgabenstellung überdenkt, dann sind drei Geschwindigkeiten gegeben (v_1 und v_2 sowie u_2). Also will man sicher die dritte (u_1) berechnen. Bleiben die beiden Massen. Dies ist nun so zu verstehen, dass man m_1 als gegeben ansieht und dann m_2 in Abhängigkeit von m_1 berechnen soll. Man erhält dann ein Ergebnis der Form $m_2 = k \cdot m_1$. Die eigentlichen Unbekannten sind dann also u_1 und m_2.

Ohne Einheiten: Aus (1): $4m_1 = m_1 u_1 + 2m_2$ (3)

Aus (2): $8m_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + 2m_2$ (4)

(4) – (3): $4m_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - m_1 u_1 \quad | : m_1$

$$\frac{1}{2} u_1^2 - u_1 - 4 = 0$$

$$u_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \pm 3 = \begin{cases} 4\frac{m}{s} \\ -2\frac{m}{s} \end{cases}$$

Im Falle $u_1 = 4\frac{m}{s}$ hat kein Stoß stattgefunden, also gilt $u_1 = -2\frac{m}{s}$.

u_1 in (3): $4m_1 = -2m_1 + 2m_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_2 = 3m_1}$

b) Beschreibe die Stelle an der m_1 nach dem Stoß wieder anhält.

Nach a) fährt m_1 mit $u_1 = -2\frac{m}{s}$ weiter, also wieder zurück und den Hang hinauf in Richtung A.

Die Höhe für den Haltepunkt H liefert der Energieerhaltungssatz:

$$\underbrace{E_{unten} = \tfrac{1}{2} m_1 \cdot 4\tfrac{m^2}{s^2}} = \underbrace{m_1 \cdot g \cdot h_H = E_{oben}} \quad \Rightarrow \quad h_H = \frac{2\frac{m^2}{s^2}}{10\frac{m}{s^2}} = 0{,}2\,m$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

c) m_2 fährt anschließend durch die Kreisbahn. Wie groß darf deren Radius höchstens sein, damit die Bahn gerade noch durchfahren werden kann?

Bedingung: Ich höchsten Punkt der Bahn muss gelten:

$$F_Z \geq F_G \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cancel{m_2}\, v_{oben}^2}{r} \geq \cancel{m_2} \cdot g \qquad (5)$$

Doch dazu muss man die Bahngeschwindigkeit im oberen Punkt kennen.
Energieerhaltungssatz:

$$\underbrace{\tfrac{1}{2} m_2 \cdot u_2^2}_{E_{unten}} = \underbrace{m_2 \cdot g \cdot 2r + \tfrac{1}{2} m_2 \cdot v_{oben}^2}_{E_{oben}} \qquad \Big| : \frac{m_2}{2}$$

$$u_2^2 = g \cdot 4r + v_{oben}^2$$

$$4 \tfrac{m^2}{s^2} = 40 \tfrac{m}{s^2} \cdot r + v_{oben}^2$$

$$v_{oben}^2 = 4 \tfrac{m^2}{s^2} - 40 \tfrac{m}{s^2} \cdot r$$

In (5):

$$\frac{4 \frac{m^2}{s^2} - 40 \frac{m}{s^2} \cdot r}{r} \geq g \qquad \Big| \cdot r$$

$$4 \tfrac{m^2}{s^2} - 40 \tfrac{m}{s^2} \cdot r \geq 10 \tfrac{m}{s^2} \cdot r$$

$$4 \tfrac{m^2}{s^2} \geq 50 \tfrac{m}{s^2} \cdot r$$

$$r \leq \frac{4}{50} m = 0{,}08\, m$$

Kommentar: Diese 8 cm Höhe zeigen, dass dieses Experiment in der Praxis nicht durchführbar ist. Man betrachte die Aufgabe also nur als Rechenübung.

Diese Aufgabe war eine Klausur für eine 11. Klasse aus dem Jahr 1975 ☺.
Ich habe sie nicht mehr verändert, weil die Rechnungen so schön „aufgehen“.

Demo-Text für www.mathe-cd.de